3 Функции комплексного переменного

3.1 Элементарные функции

Исходя из определений, докажите равенства:

1) $e^z e^w = e^{z+w}$;
2) $e^{x+iy} = e^x(\cos x + i\sin y)$ (*формула Эйлера*);
3) $e^z = e^{z+2i\pi}$ (*т.е. экспонента имеет мнимый период, равный* $2i\pi$);
4) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$;
5) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$;
6) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$;
7) $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$;
8) $\sin z = \sin(z + 2\pi)$ (*т.е. синус имеет действительный период, равный* 2π);
9) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

3.2 Вычисление значений элементарных функций

Вычислите:

1) $e^{i\pi}$;
2) $\sin(1-i)$;
3) $\operatorname{tg}(2+i)$;
4) $\operatorname{Ln} 1$;
5) $\operatorname{Ln} i$;
6) $\operatorname{Ln}(-1)$;
7) $\sqrt[3]{1}$ (*используя определение комплексной экспоненты*);
8) i^i.

3.3 Решение уравнений

Решите уравнения в комплексных числах:

1) $e^z = -1$;
2) $\cos z = 2$;
3) $\operatorname{tg} z = i$.

3.4 Конформные отображения

Изобразите на комплексной плоскости образы координатной сетки при преобразованиях:

1) $z \to z + \dfrac{1}{z}$ (образ координатной сетки в полярной системе координат);
2) $z \to e^z$ (образ полосы $-\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$);
3) $z \to \sin z$ (образ полосы $-\pi \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$).