

3 Теория множеств. Элементы комбинаторики

Задача 1. Имеется 6 пар ботинок различного размера. Сколькими способами можно выбрать из них один ботинок на левую ногу и один — на правую так, чтобы эти ботинки были различного размера?

Задача 2. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

Задача 3. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

Задача 4. Сколькими способами Винни-Пух может выбрать себе на завтрак три горшочка с мёдом, если на полке стоит 20 горшочков, в каждом из которых свой сорт мёда, и ему все равно, в каком порядке их есть? Сколькими способами он может выбрать первое, второе и десерт?

Задача 5. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Задача 6. Сколько четырехзначных чисел, не делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число может содержать каждую цифру несколько раз?

Задача 7. Вокруг звезды Бета Версии вращаются планеты. Все они, кроме двух, — земного типа; все, кроме двух, — газовые гиганты; остальные — планеты типа Плутона. Сколько планет в системе звезды Бета Версии?

Задача 8. Каждую ночь Андрей играет в покер. Сколькими способами он может выбрать из полной колоды (52 карты) 5 карт так, чтобы:

- 1) среди них был ровно один туз;
- 2) среди них был хотя бы один туз;
- 3) сколько всего существует комбинаций из 5 карт?

Задача 9. На планете Тум-Тум-Ф $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. Какая доля населения планеты состоит в браке?

Задача 10. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Задача 11. Имеется множество C , состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы:

- 1) множества A и B не пересекались;
- 2) множество A содержалось бы в множестве B ?

Задача 12. Каких подмножеств больше у 100-элементного множества: мощности 57 или мощности 43?

Задача 13. Сколько существует подмножеств у n -элементного множества?

Задача 14. Пусть множество A содержит n элементов, а его подмножество B содержит k элементов. Сколько существует множеств C , для которых $B \subset C \subset A$?

Задача 15. Докажите, что последовательностей длины n , составленных из нулей и единиц, столько же, сколько подмножеств у множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Задача 16. Докажите, что число последовательностей нулей и единиц длины n , в которых число единиц равно k , равно числу k -элементных подмножеств n -элементного множества. (Это число обозначается C_n^k .)

Задача 17. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Задача 18. Пусть U — непустое конечное множество. Докажите, что подмножеств множества U , имеющих чётную мощность, столько же, сколько имеющих нечётную мощность.

Задача 19. Какие из равенств

1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

2) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$;

3) $(A \setminus B) \cap C = (A \setminus C) \cap B$;

4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

5) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

верны для любых множеств A, B, C ?

Задача 20. Даны 2009 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 2009 множеств?

Задача 21. Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A и B с помощью (многократно используемых) операций пересечения, объединения и разности? Тот же вопрос для произвольного числа множеств. (Два выражения считаются одинаковыми, если они равны при любых значениях переменных.)

Задача 22. Из багажника Вячеслава гурьбой вывалилось 60 маленьких медвежат с балалаечками. Оказалось, что среди любых 10 медвежат есть не меньше трех медвежат с одинаковыми балалаечками. Известно, что у каждого медвежонка с балалаечкой ровно одна балалаечка. Докажите, что среди всех медвежат с балалаечками найдётся по меньшей мере 15, у которых одинаковые балалаечки.