

1 Комплексные числа. Алгебраическая форма

1.1 Основные определения

Изобразите следующие комплексные числа на комплексной плоскости, найдите их модули и аргументы, укажите комплексно сопряжённые числа:

- 1) $-2i$;
- 2) $1 - i$;
- 3) $i\sqrt{3} - 1$.

Найдите действительные числа x и y из уравнений:

- 1) $3x - y + (x + y)i = 7 + 5i$;
- 2) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$.

1.2 Умножение и деление

Выполните действия:

- | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------|
| 1) $(3 + i)(2 - 3i)$; | 3) $\frac{2 - 3i}{3 + 2i}$; | 5) i^{1789} ; |
| 2) $(1 - i)\overline{(2 + 3i)}$; | 4) $\frac{5 - i\sqrt{3}}{2 + 3i}$; | 6) $(\sqrt{3} - i)^3$; |
| | | 7) $(1 + i)^{2010}$. |

Решите уравнения:

- 1) $iz + (3i - 5)\bar{z} = |4i - 3|\overline{(4i + 3)}$;
- 2) $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$.

1.3 Решение уравнений

Решите уравнения. Найдите сумму и произведение всех корней каждого из уравнений и изобразите корни на комплексной плоскости:

- | | | |
|-------------------------|-----------------|-------------------|
| 1) $z^2 + 2z + 2 = 0$; | 3) $z^2 = i$; | 5) $z^{12} = 1$. |
| 2) $z^3 = -1$; | 4) $z^6 = -1$; | |

1.4 Неравенства

Изобразите на комплексной плоскости множества, удовлетворяющие следующим системам неравенств:

- | | |
|---|--|
| 1) $\begin{cases} -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, \\ 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3; \end{cases}$ | 3) $1 \leq z + 1 + i \leq 3$; |
| 2) $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \arg \bar{z} \leq \frac{2\pi}{3}, \\ 1 \leq z \leq 2; \end{cases}$ | 4) $z^2 z ^2 - 5z z < -4$; |
| | 5) $\begin{cases} z < \operatorname{Re} z, \\ - z < \operatorname{Im} z. \end{cases}$ |

2 Комплексные числа. Тригонометрическая форма

2.1 Основные определения

Запишите в тригонометрической форме числа:

- 1) $-1 + i$;
- 2) $-3 - i\sqrt{3}$;
- 3) $i - \sqrt{3}$;
- 4) $3 + 4i$.

2.2 Умножение и деление

Докажите, что:

- 1) $\frac{1}{\cos \phi + i \sin \phi} = \cos(-\phi) + i \sin(-\phi)$;
- 2) при перемножении модули двух комплексных чисел перемножаются, а аргументы складываются (по модулю 2π);
- 3) при делении модули двух комплексных чисел делятся один на другой, а аргументы вычитаются (по модулю 2π);
- 4) $(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi$ (*формула Муавра*).

2.3 Формула Муавра

Выразите через $\sin \phi$ и $\cos \phi$:

- 1) $\cos 3\phi$;
- 2) $\sin 4\phi$;
- 3) $\operatorname{tg} 5\phi$.

2.4 Корни из единицы

Вычислите все значения корней и изобразите их на комплексной плоскости:

- 1) $\sqrt[6]{1}$;
- 2) $\sqrt[8]{13}$.

Докажите, что:

- 1) произведение двух корней n -ой степени из единицы также является корнем n -ой степени из единицы;
- 2) для любого числа z , являющегося корнем n -ой степени из единицы, число $\frac{1}{z}$ также является корнем n -ой степени из единицы.

2.5 Преобразования плоскости

Найдите образ множества A при преобразованиях:

1) $w = 3z + i$;

5) $w = \sqrt{z}$;

7) $w = \frac{1}{\sqrt[5]{z}}$;

2) $w = iz$;

3) $w = z^2$;

4) $w = \frac{1}{z}$;

6) $w = \sqrt[3]{z}$;

8) $w = \frac{i-1}{\sqrt{iz}} + i$.

2.6 Неравенства

Изобразите на комплексной плоскости множества, удовлетворяющие следующим неравенствам:

1) $\frac{\pi}{2} \leq \arg \frac{iz^2}{i-1} \leq \frac{5\pi}{6}$;

2) $|z + iz| = 1$.