4 Теория множеств. Комбинаторика

Задача 1. Имеется 6 пар ботинок различного размера. Сколькими способами можно выбрать из них один ботинок на левую ногу и один — на правую так, чтобы эти ботинки были различного размера?

Задача 2. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

Задача 3. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

Задача 4. Сколькими способами Винни-Пух может выбрать себе на завтрак три горшочка с мёдом, если на полке стоит 20 горшочков, в каждом из которых свой сорт мёда, и ему все равно, в каком порядке их есть? Сколькими способами он может выбрать первое, второе и десерт?

Задача 5. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Задача 6. Сколько четырехзначных чисел, не делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число может содержать каждую цифру несколько раз?

Задача 7. Вокруг звезды Бета Версии вращаются планеты. Все они, кроме двух, — земного типа; все, кроме двух, — газовые гиганты; остальные — планеты типа Плутона. Сколько планет в системе звезды Бета Версии?

Задача 8. Каждую ночь Андрей играет в покер. Сколькими способами он может выбрать из полной колоды (52 карты) 5 карт так, чтобы:

1) среди них был ровно один туз;
2) среди них был хотя бы один туз;
3) сколько всего существует комбинаций из 5 карт?

Задача 9. На планете Тум-Тум-Ф 2/3 всех мужчин женаты и 3/5 всех женщин замужем. Какая доля населения планеты состоит в браке?

Задача 10. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Задача 11. Докажите, что последовательностей длины n, составленных из нулей и единиц, столько же, сколько подмножеств у множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Задача 12. Сколько существует подмножеств у n-элементного множества?

Задача 13. Имеется множество C, состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы:

1) множества A и B не пересекались;
2) множество A содержалось бы в множестве B?

Задача 14. Пусть множество A содержит n элементов, а его подмножество B содержит k элементов. Сколько существует множеств C, для которых $B \subset C \subset A$?

Задача 15. Докажите, что число последовательностей нулей и единиц длины n, в которых число единиц равно k, равно числу k-элементных подмножеств n-элементного множества. (Это число обозначается C_n^k.)

Задача 16. Каких подмножеств больше у 100-элементного множества: мощности 57 или мощности 43?

Задача 17. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Задача 18. Пусть U — непустое конечное множество. Докажите, что подмножеств множества U, состоящих из четного числа элементов, столько же, сколько состоящих из нечетного числа элементов.

Задача 19. Какие из равенств

1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
2) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$;
3) $(A \setminus B) \cap C = (A \setminus C) \cap B$;
4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
5) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

верны для любых множеств A, B, C?

Задача 20. Докажите, что симметрическая разность ассоциативна: $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Задача 21. Докажите, что $(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \ldots \cap B_n) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup \ldots \cup (A_n \triangle B_n)$ для любых множеств $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$.

Задача 22. Даны 2010 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 2010 множеств?

Задача 23. Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A и B с помощью (многократно используемых) операций пересечения, объединения и разности? Тот же вопрос для произвольного числа множеств. (Два выражения считаются одинаковыми, если они равны при любых значениях переменных.)

Задача 24. Из багажника Вячеслава гурьбой вывалилось 60 маленьких медвежат с балалаечками. Оказалось, что среди любых 10 медвежат есть не меньше трех медвежат с одинаковыми балалаечками. Известно, что у каждого медвежонка с балалаечкой ровно одна балалаечка. Докажите, что среди всех медвежат с балалаечками найдётся по меньшей мере 15, у которых одинаковые балалаечки.

3 Теория множеств. Равномощность

Задача 1. Докажите, что любые два интервала (a, b) и (c, d) на прямой равномощны.

Задача 2. Докажите, что любые две окружности на плоскости равномощны. Докажите, что любые два круга на плоскости равномощны.

Задача 3. Докажите, что полуинтервал $[0, 1)$ равномощен полуинтервалу $(0, 1]$.

Задача 4. Докажите, что полуинтервал $[0, 1)$ равномощен отрезку $[0, 1]$. Докажите, что интервал $(0, 1)$ равномощен отрезку $[0, 1]$.

Задача 5. Докажите, что интервал $(0, 1)$ и луч $(0, +\infty)$ равномощны.

Задача 6. Докажите, что открытый круг равномощен плоскости.

Задача 7. Докажите, что открытый круг равномощен замкнутому квадрату.

Задача 8. Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству всех подмножеств натурального ряда.

Задача 9. Докажите, что множество бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2, 3 равномощно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1.

Задача 10. Докажите, что множество бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2 равномощно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1.

Задача 11. Попробуйте доказать теорему Кантора-Бернштейна: если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B, а B равномощно некоторому подмножеству множества A, то множества A и B равномощны.

4 Теория множеств. Счётность и несчётность

Задача 1. Докажите, что следующие множества счётны:

1) множество $\mathbb{N} \setminus \{2009\}$;
2) множество натуральных чисел, делящихся на данное число $m \in \mathbb{N}$;
3) множество целых чисел $\mathbb{Z}$.

Задача 2. Докажите, что:

1) подмножество счётного множества или конечно, или счётно;
2) если A и B — счётные множества, то $A \cup B$ тоже счётно;
3) конечное объединение счётных множеств счётно;
4) счётное объединение счётных множеств счётно.

Задача 3. Докажите, что:

1) множество точек плоскости, координаты которых являются целыми числами, счётно;
2) множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

Задача 4. Докажите, что:

1) множество корней всех линейных уравнений с целыми коэффициентами счётно;
2) множество корней всех квадратных уравнений с целыми коэффициентами счётно;
3) множества из пунктов 1) и 2) равномощны множеству корней всех квадратных уравнений с рациональными коэффициентами;
4) множество алгебраических чисел $\mathbb{A}$ счётно.

Задача 5. Докажите, что следующие множества счётны:

1) множество конечных последовательностей из 0 и 1;
2) множество конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.

Задача 6. Докажите следующие утверждения:

1) в любом бесконечном множестве найдется счётное подмножество;
2) множество M является бесконечным тогда и только тогда, когда оно равномощно множеству, полученному из M удалением одного элемента.

Задача 7 $(*)$**.** Докажите, что следующие множества несчётны:

1) множество бесконечных последовательностей из 0 и 1;
2) множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$;
3) множество всех взаимно однозначных отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Задача 8. Докажите, что следующие множества равномощны:

1) $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$;
2) $(*)$ все множества из предыдущей задачи;
3) $(*)$ $\mathbb{R}$ и множество из пункта 1) предыдущей задачи.