

5 Введение в топологию

Задача 1. Разбейте плоскость на 2 равные (совмещаемые при движении) части.

5.1 Открытые и замкнутые множества

Задача 2. Докажите, что:

- 1) объединение и пересечение двух открытых множеств является открытым;
- 2) объединение и пересечение двух замкнутых множеств является замкнутым;
- 3) (*) множество замкнутых множеств равносильно множеству открытых множеств.

Задача 3. Приведите примеры множеств:

- 1) не являющегося ни замкнутым, ни открытым;
- 2) являющегося замкнутым и открытым одновременно;
- 3) ограниченного открытого, являющегося объединением бесконечного числа замкнутых;
- 4) непустого замкнутого, являющегося пересечением бесконечного числа открытых.

5.2 Внутренние и граничные точки

Задача 4. Приведите примеры множеств:

- 1) непустого, не имеющего границы;
- 2) такого, что его граница совпадает с множеством внутренних точек;
- 3) непустого, не имеющего внутренних точек;
- 4) имеющего неограниченную границу;
- 5) неограниченного, с непустой границей;
- 6) неограниченного, граница которого пуста и ограничена.

Задача 5. Докажите, что:

- 1) если множество ограничено, то и его граница тоже ограничена;
- 2) (*) множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит свою границу (т.е. совпадает со своим замыканием);
- 3) (*) множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством своих внутренних точек;
- 4) (**) граница всегда является замкнутым множеством.

5.3 Непрерывные отображения

Задача 6. Приведите примеры непрерывных отображений:

- 1) полуинтервала на окружность;
- 2) восьмерки на окружность;
- 3) окружности на восьмерку.

Задача 7. Докажите, что:

- 1) стандартное отображение полуинтервала $(0, 1]$ на интервал $(0, 1)$, переводящее $\frac{1}{2^n}$ в $\frac{1}{2^{n+1}}$ и оставляющее остальные точки на месте, не является непрерывным;
- 2) (**) не существует непрерывного отображения полуинтервала на интервал.

Задача 8. Докажите, что ограничение непрерывного отображения на любое подмножество является непрерывным отображением.

5.4 Связные множества

Задача 9. Приведите примеры:

- 1) замкнутого, ограниченного, связного множества с несвязной границей;
- 2) несвязного множества, замыкание которого связно.

Задача 10. Опишите класс всех связных множеств на прямой.

Задача 11. Докажите, что образ связного множества при непрерывном отображении является связным.

5.5 Гомеоморфные множества

Задача 12. Докажите, что:

- 1) любые два отрезка гомеоморфны;
- 2) интервал и прямая гомеоморфны;
- 3) внутренность круга и внутренность квадрата гомеоморфны.

Задача 13. (*) Докажите, что гомеоморфные множества имеют одинаковое число компонент связности.

Задача 14. (*) Докажите, что:

- 1) полуинтервал не гомеоморфен окружности;
- 2) множество, состоящее из двух пересекающихся прямых, не гомеоморфно множеству, состоящему из одной прямой;
- 3) восьмерка не гомеоморфна окружности.

Задача 15. Классифицируйте с точностью до гомеоморфизма все буквы русского алфавита.